Algebra III - Abstraktna algebra, 11.01.2017.

1. Določi število elementov reda 12 v grupi $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times U(9)$.

Re.
$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$, $|0| = 1$, $|1| = 3$, $|2| = 3$;
$\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, $|0| = 1$, $|1| = 4$, $|2| = 2$, $|3| = 4$;
$U(9) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, $|1| = 1$, $|2| = 6$, $|4| = 3$, $|5| = 6$, $|7| = 3$, $|8| = 2$;
$\forall (g_1, g_2, g_3) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times U(9)$ imamo $12 = |(g_1, g_2, g_3)| = \mathrm{lcm}(|g_1|, |g_2|, |g_3|)$ če in samo če $(|g_1|, |g_2|, |g_3|) \in \{(1, 4, 3), (1, 4, 6), (3, 4, 1), (3, 4, 2), (3, 4, 3), (3, 4, 6)\}$...
32 elementa

2. Uporabi prvi izrek o izomorfizmu, in pokaži, da je $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\langle(2, 7)\rangle \cong \mathbb{Z}$.

Re.
Če je $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definirana z $\phi(a, b) = 7a - 2b$ potem je ϕ homomorfizem, $\phi(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ in $\ker\phi = \langle(2, 7)\rangle$...

3. Dan je pravilni petkotnik katerega, ogljišča so označena s števili 1, 2, 3, 4 in 5. Naj bo G grupa vseh simetrij pravilnega petokotnika 12345 in naj bo $H = G_1$ (H je stabilizator ogljišča 1 v grupi G).

(a) Določi element $\alpha \in G$ za katerega je $\alpha(1) = 4$. Poišči orbito ogljišča 1 glede na grupo G.

(b) Določi element $\beta \in H$ za katerega je $\beta(2) = 5$. Poišči orbito ogljišča 2 glede na grupo H.

(c) Ispiši vse elemente stabilizatora H_2.

(d) Uporabi orbita-stabilizator izrek in dokaži, da je $|G| = 10$.

Re.
$G = D_5$, $H = \{(1), (25)(34)\}$, $\alpha = (14)(23)$, $G1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\beta = (25)(34)$, $H2 = \{2, 5\}$, $H_2 = \{(1)\}$...

4. Poišči mogoče število Sylowih 3-podgrup in Sylowih 7-podgrup v grupi reda 3087.

Re.
$|G| = 3087 = 3^2 \cdot 7^3$;
$1 + 3m$ deli $|G|$ za $m \in \{0, 2, 16, 114\}$;...
$1 + 7m$ deli $|G|$ za $m = 0$;...

Več na `http://osebje.famnit.upr.si/~penjic/`